

Helligkeitsverlauf bei Sonnenfinsternissen (II)

Von Michael Altmann, URANIA Wiesbaden

Im ersten Teil dieses Artikels haben wir uns mit der Abnahme bzw. Zunahme der Helligkeit in den partiellen Phasen einer Sonnenfinsternis beschäftigt und diese auf die zeitliche Veränderung der noch bzw. wieder sichtbaren Sonnenfläche zurückgeführt. Bezogen haben wir diese Fläche auf den Weg des Mondes über die Sonnenscheibe.

Gegenstand dieses zweiten Teiles ist Berechnung der Zeiten, bei denen die Phase P die in [4] vorgegebenen Werte und damit die Resthelligkeit einen bestimmten (Blenden-) Werte einnimmt. Letztlich handelt es sich hier um eine für uns Amateure nicht ganz triviale Berechnung der lokalen Bedingungen während einer Sonnenfinsternis. Um diese dennoch möglichst einfach zu halten, wollen wir zu den im Teil 1 dieses Artikels gemachten Vereinfachungen einige weitere zufügen, soweit diese das Ergebnis für unsere Anwendung nicht störend beeinflussen.

So sollen sich die Betrachtungen auf einen Ort auf der Zentrallinie der Finsternis beziehen¹, die Gestalt der Erde wird als Ellipsoid angenommen und zur Berechnung der Mondschatteposition verwenden wir die im *Astronomical Almanac* oder in der *NASA Reference Publication* angegebenen polynomialen Annäherungen.

Die Fundamentalebene

Bei Sternbedeckungen – darum handelt es sich auch bei einer Sonnenfinsternis – ist es üblich, zur Vorhersage der lokalen Ereignisse das Geschehen auf die sogenannte Fundamentalebene zu projizieren. Bei der Fundamentalebene handelt es sich um eine gedachte Ebene, welche den Erdmittelpunkt schneidet und auf der die Zentrallinie des Mondschatte senkrecht steht. Die x -Achse ist die Schnittlinie mit der Äquatorebene, die y -Achse zeigt nach Norden. Entsprechend den Konventionen der IAU haben westliche Längengrade negative Werte und östliche positive².

Einer der Vorteile der Fundamentalebene ist der auf dieser immer kreisförmige Mondschatte. Um die Phase P für unseren Beobachtungsort zu bestimmen, müssen wir nur diejenigen Zeiten ermitteln, zu denen der Abstand unseres Beobachtungsortes zur MondschatteMitte entsprechende Anteile des HalbschatteDurchmesser des Mondes beträgt.

Approximation durch Besselsche Polynomelemente

Diese Überlegungen nützen uns nur, wenn wir auch auf einfache Weise zu den entsprechenden Koordinaten auf der Fundamentalebene kommen. Hier bieten uns Schriften

¹Wo sonst wollen Sie sich während einer Sonnenfinsternis aufhalten?

²Auf Landkarten und Globen ist es umgekehrt ...

wie der Astronomische Almanach [3] oder die Veröffentlichungen der NASA [1] entsprechende Hilfestellung:

Für einen definierten Zeitabschnitt, welcher in den jeweiligen Publikationen angegeben ist, werden Polynomelemente für die interessierenden Größen wie z. B. x und y angegeben, welche eine Berechnung dieser Werte zu einem beliebigen Zeitpunkt innerhalb des Gültigkeitsintervalls erlauben. Dieses Verfahren geht auf den Astronomen und Mathematiker Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) zurück. Für folgende Variablen werden üblicherweise Näherungspolynome angegeben:

- x, y : Schnittpunkt der Zentrallinie des Mondschattens mit der Fundamentalebene in kartesischen Koordinaten.
- d, μ : Deklination und Rektaszension der Richtung des Mondschattens.
- l_1, l_2 : Durchmesser von Halb- und Kernschatten des Mondes auf der Fundamentalebene in Einheiten des Äquatorialradius der Erde.

Zu diesen Parametern finden wir z. B. in [1] in tabellarischer Form die Polynomkoeffizienten a_0 – a_3 , wobei a ersatzweise für x, y, d, μ, l_1 oder l_2 steht. Den Wert dieser Variablen erhalten wir durch Auswertung des entsprechenden Polynoms mit

$$a = \sum_{n=0}^3 a_n t^n. \quad (1)$$

Diese einfachen Gleichungen sind natürlich keine geschlossenen Lösungen für die Bewegung des Mondschattens, sondern lediglich eine einfach auswertbare Annäherung an die tatsächlichen Werte. Der zeitliche Gültigkeitsbereich der Polynome sowie der Zeitnullpunkt wird in [1] angegeben. Zu der Genauigkeit erfährt man, daß auf niedrigste Fehlerquadrate im Gültigkeitsintervall optimiert wurde. Auch die Konuswinkel von Halbschattenkegel f_1 und Kernschattenkegel f_2 sind dort verzeichnet.

Es sind bei den verschiedenen Quellen auch Unterschiede in den Konventionen zu beachten. Zwar sind z. B. die Zeiten für die Polynomelemente normalerweise in TDT angegeben und müssen auf UT umgerechnet werden³, aber zeitlicher Gültigkeitsbereich und Nullpunkt können sich unterscheiden. Auch Winkel können in Grad, Bogenmaß oder als Ergebnis einer darauf angewandten Winkelfunktion angegeben sein.

Projektion des Beobachters auf die Fundamentalebene

Die Bewegung des Mondschattens kennen wir damit, aber wie bewegt sich der Beobachter auf der Fundamentalebene? Die Bewegung des Beobachters wird durch die Rotation der Erde und durch die Drehung der Fundamentalebene während der Finsternis hervorgerufen.

Zunächst müssen wir die geodätischen Koordinaten λ, ϕ , und h (Länge, Breite und Höhe über dem Meeresspiegel) in ein geozentrisches Koordinatensystem λ, ϕ' und ρ

³Dadurch „automatische“ Erfassung eventuell noch auftretender Variationen der Erdrotation.

(Länge, Breite und Radius vom Erdmittelpunkt aus) umrechnen. Die Länge ist in beiden Fällen gleich, für die anderen Größen finden wir im *Astronomical Almanac* [3] die Gleichungen:

$$\begin{aligned} X &= a \rho \cos \phi' \cos \lambda = (a C + h) \cos \phi \cos \lambda \\ Y &= a \rho \cos \phi' \sin \lambda = (a C + h) \cos \phi \sin \lambda \\ Z &= a \rho \sin \phi' = (a S + h) \sin \phi \end{aligned} \quad (2)$$

X , Y und Z sind hier die kartesischen geozentrischen Koordinaten (nicht zu verwechseln mit den Koordinaten x und y auf der Fundamentalebene), a ist der Äquatorialradius der Erde (= 6 378 160 m) und C und S sind von der geodätischen Breite abhängige Hilfsfunktionen des Referenzsphäroids. Für diesen wählen wir der Einfachheit⁴ halber das Ellipsoid (e = Exzentrizität, $e^2 = 0,006\,694\,54$) und können mit

$$\begin{aligned} C &= \{\cos^2 \phi + (1 - e^2) \sin^2 \phi\}^{-1/2} \\ S &= (1 - e^2) C \end{aligned} \quad (3)$$

die Hilfsfunktionen 3 in die Gleichungen 2 einsetzen und nach der geozentrischen Breite

$$\phi' = \arctan \frac{(h + a S) \tan \phi}{a C + h} \quad (4)$$

und der Höhe über dem Erdmittelpunkt (geozentrischer Radius des Beobachters)

$$\rho = \frac{(a C + h) \cos \phi \sec \phi'}{a} \quad (5)$$

auflösen. Für die Berechnung der Beobachterkoordinaten auf der Fundamentalebene finden wir die notwendigen Gleichungen wieder in [3]:

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \phi' \sin \Theta \\ \eta &= \rho \sin \phi' \cos d - \rho \cos \phi' \sin d \cos \Theta \\ \zeta &= \rho \sin \phi' \sin d - \rho \cos \phi' \cos d \cos \Theta \end{aligned} \quad (6)$$

mit $\Theta = \mu + \lambda$. Die konusförmigen Schattenkegel müssen noch mit

$$L_i = l_i - \zeta \tan f_i, \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

auf den Durchmesser bei der Beobachterposition umgerechnet werden.

Berechnung der Zeitpunkte definierter Abschattung

Mit dem Durchmesser des Halbschattens $L_1(t)$ und des Kernschattens $L_2(t)$ sowie den Beobachterkoordinaten $r_{\vec{B}}(t)$ und den Mondschattenkoordinaten $r_{\vec{M}}(t)$ sind jetzt alle

⁴Die bessere Genauigkeit, welche mit einem geodätischen Referenzsphäroiden wie z.B. dem WGS 84 zu erzielen wäre, wird für unsere Anwendung nicht benötigt. Die Besselschen Polynom-elemente basieren ebenfalls auf einer ellipsoiden Approximation.

Blendenstufen	Phase P	Uhrzeit (h:m:s)
0 (1. Kontakt)	0,000000	11:13:09,2
1	0,596027	12:00:15,1
2	0,802356	12:16:52,9
3	0,901667	12:24:55,8
4	0,950893	12:28:55,7
5	0,975454	12:30:55,5
6	0,987728	12:31:55,5
– (2. Kontakt)	1,000000	12:32:55,4

Tabelle 1: Phase und Uhrzeiten für Stuttgart bei verschiedenen Abschattungen

Variablen bestimmt, um die Zeitpunkte für gegebene Abschattungsphasen P durch Auflösen der Gleichung

$$|r_{\vec{M}}(t) - r_{\vec{B}}(t)| = L_1(t)(1 - P) + P L_2(t) \quad (8)$$

nach t zu bestimmen. Die Gleichung beschreibt, wann der Abstand zwischen Beobachter und Mondschattenmitte $|r_{\vec{M}}(t) - r_{\vec{B}}(t)| = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ vorgegebene Anteile $1 - P$ an der Differenz⁵ zwischen Halbschattendurchmesser $L_1(t)$ und Kernschattendurchmesser $L_2(t)$ erreicht.

Mit einem Kleinrechner läßt sich Gleichung 8 mit Newtonscher Iteration für die gewünschten Werte von P nach t auflösen. Diese Iteration konvergiert wegen der fast gleichförmigen Bewegung von Erde und Mondschatten während der Finsternis sehr schnell; schon nach vier bis fünf Iterationen ist der Fehler $< 10^{-6}$ Stunden.

Eine Beispielrechnung für Stuttgart⁶ zeigt Tabelle 1, für andere Orte bzw. die Phasen zwischen drittem und viertem Kontakt verfährt man entsprechend. Wie man sieht, staffeln sich die Aufnahmezeitpunkte gegen Ende der partiellen Phase sehr dicht. Während man beispielsweise bei einer von 1 bis 6 Blendenstufen reichenden Belichtungsreihe zwischen den beiden ersten Aufnahmen eine gute Dreiviertelstunde pausieren kann, folgen die letzten beiden Aufnahmen in nur 60 Sekunden Abstand.

Literatur

- [1] Fred Espenak, Jay Anderson (1997): *Total Solar Eclipse of 1999 August 11*, NASA Reference Publication 1398.
- [2] Il'ja Nikolaevič Bronštejn et al. (1979): *Taschenbuch der Mathematik*.
- [3] Royal Greenwich Observatory (1996): *The Astronomical Almanac for the Year 1999*.

⁵Der Kernschattendurchmesser $L_2(t)$ ist bei totalen Finsternissen negativ und bei ringförmigen positiv.

⁶Gerechnet für $\phi = 48^\circ 46'$ n. B., $\lambda = 9^\circ 11'$ ö. L., $h = 0$ m.

- [4] Michael Altmann (1999): *Helligkeitsverlauf bei Sonnenfinsternissen, Teil 1, Mitteilungen* **38**:1.